

# АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ МАГНИТОКОНВЕКЦИИ НА ГРАНИЦАХ ВНЕШНЕГО ЯДРА ЗЕМЛИ

## Введение

Источником магнитного поля Земли являются течения электропроводящей жидкости во внешнем ядре Земли. Описание дипольной и мультипольных компонент магнитного поля (рис. 1) производится в рамках теории магнитогидродинамического (МГД) динамо (Джекобс, 1979).

Нелинейность МГД уравнений порождает богатый выбор разнообразных сценариев поведения магнитного

ного магнитного поле азимутально и почти полностью скрыто в ядре Земли. Генерация полоидального поля вызвана  $\alpha$ -эффектом, а тороидальная компонента поля возбуждается азимутальными течениями –  $\omega$ -эффект (Рис. 2). Предположения о сравнимости движущей Архимедовой силы с Лоренцевой и Кориолисовой (Starchenko, 2000) имеет место во внешнем ядре Земли и, возможно, на ранних этапах формирования ядер планет и больших лун, например, вулканизирующий Ио.

В моделях турбулентного динамо скорость  $v$  и напряженность магнитного поля  $H$  представляется в виде суперпозиции среднестатистического значения и флуктуирующей добавки. Статистическое усреднение закона Ома для движущейся среды приводит к следующему соотношению для плотности тока:

$$\vec{j} = \sigma \left( \vec{E} + \mu \vec{v} \times \vec{H} + \mu \overline{v' \times H'} \right).$$

Это уравнение содержит дополнительную электродвижущую силу

$$\mu \overline{v' \times H'},$$

где  $v'$  и  $H'$  – флуктуирующие добавки. Parker (1955) высказал предположение, что  $\overline{v' \times H'} = \alpha \vec{H}$ , где  $\vec{H}$  – среднее значение магнитного поля. Steenbeck & Krause (1966) назвали это соотношение  $\alpha$ -эффектом. Скорость генерации магнитного поля зависит от спиральности  $\alpha$  и определяется как  $v' \cdot \text{rot} v'$ .

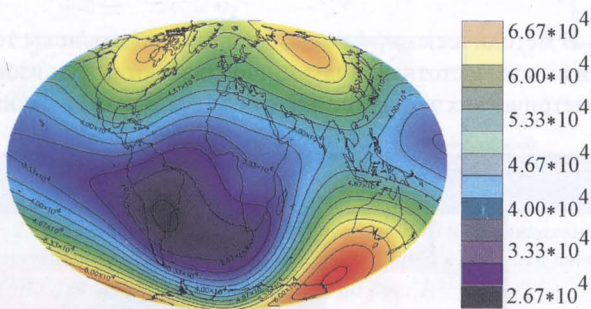


Рис. 1. Мультипольное магнитное поле Земли (нТ).

диполя, сопровождающийся типичными бифуркациями и катастрофами Арнольда-Тома динамических систем.

Магнитное поле в ядре имеет две составляющие: полоидальную и тороидальную. Полоидальное поле наблюдается на поверхности Земли и может быть редуцировано к границе ядро-мантия. Осесимметричное тороидаль-



Рис. 2. Магнитное поле в жидком ядре Земли.

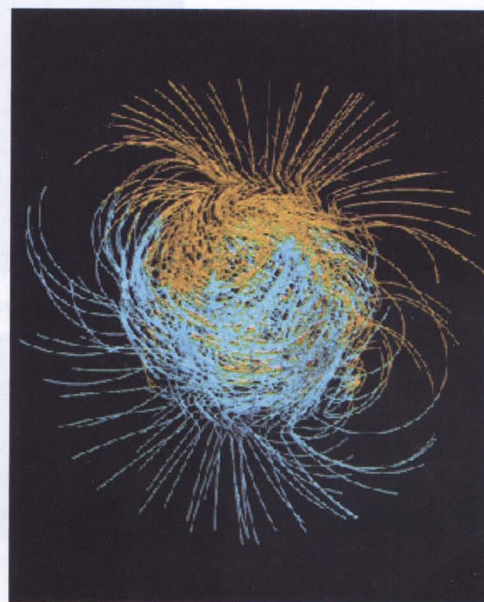


Рис. 3. 3D моделирование силовых линий магнитного поля в жидком ядре Земли (Glatzmaier, Roberts, 1997).



Термодинамические параметры	
$R_{ICB} = 1.222 \cdot 10^6 \text{ m}$	$\rho_{ICB} = 12.166 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
$R_{CMB} = 3.480 \cdot 10^6 \text{ m}$	$\rho_{CMB} = 9.903 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
$m_{IC} = 9.839 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	$G_{ICB} = G m_{IC} / R_{ICB}^2$
$U_{ICB} = 4.402 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$	$P_{ICB} = 3.289 \cdot 10^{11} \text{ N m}^{-2}$
$T_{ICB} = 5300 \text{ K}$	$C_p = 840 \text{ J (kg K)}^{-1}$
$h^{\xi} = 5 \cdot 10^6 \text{ J kg}^{-1}$	$I_{core} = 5.86 \cdot 10^{34} \text{ kg m}^2$
$E_{kinetic} = (1-2) \cdot 10^{25} \text{ ergs}$	$I_{mantle} = 7.12 \cdot 10^{37} \text{ kg m}^2$
Ключевые безразмерные параметры	
$R_n = g_o \alpha Q / (2 \Omega c_p \rho k^2) = 5.7 \cdot 10^7$	Модиф. число Рэлея
$E = v / (2 \Omega d^2) = 2 \cdot 10^{-6}$	Число Экмана
$P = \eta / k = 10$	Число Прантля
Геофизические размерные параметры	
$\alpha = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$	Объемный коэф. расширения
$\rho = 11 \text{ g cm}^{-3}$	Плотность внешнего ядра
$c_p = 6.7 \cdot 10^6 \text{ erg gr}^{-1} \text{ K}^{-1}$	Уд. теплоемкость жидкого ядра
$v \approx 0.4 \text{ cm s}^{-1}$	Скорость течения
$\Omega = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$	Угловая скорость
$d = 2.26 \cdot 10^8 \text{ cm}$	Толщина жидкого ядра
$\eta = 3 \cdot 10^4 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$	Коэф. магнитной диффузии
$g_o = 1.1 \cdot 10^3 \text{ cm s}^{-2}$	Ускорение свободного падения
$Q = 5 \cdot 10^{20} \text{ erg s}^{-1}$	Мощность потока тепла
$k = 3 \cdot 10^3 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$	Коэф. тепловой диффузии
$k^s = 1450 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$	Турбулентная диффузия
$\rho_{ic} \approx 1.16 \rho_{oc}$	Плотность внутреннего ядра
$\mu_o = 4 \pi \text{ at c.g.s units}$	Магнитная проницаемость
$\tau_{\eta} = R_{CMB}^2 / \pi^2 \eta \approx 1.3 \cdot 10^4 \text{ yr}$	Время магнитной диффузии
$\nu = 10^{-2} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$	Молекулярная вязкая диффузия
$P_m = \nu / \eta$	Магнитное число Прантля
$R_o = v_{max} / (2 \Omega d) \approx 10^{-5}$	Число Россби
$B_{max(ICB)} \approx 560 \text{ gauss}$	Магн. поле на границах ядер
$R_m = v_{max} \cdot d / \eta \approx 3 \cdot 10^3$	Магнитное число Рейнольдса
$B_{max}^2 \cdot (2 \Omega \mu_o \rho \eta)^{-1} \approx 500$	Число Элсассера
$B_{max} \cdot d (\mu_o \rho \eta \nu)^{-1/2} \approx 2 \cdot 10^4$	Число Хартмана
$Nu = Q / Q_o \approx 20$	Число Нуссельта
$E_{magnetic} = (2-4) \cdot 10^{28} \text{ ergs}$	Энергия магнитного поля
$B_{max}^2 \cdot (2 \Omega \mu_o \rho d v_{max})^{-1} \approx 0.2$	Параметр магнитной связи

Таблица. Параметры земного ядра.

Спиральность  $\hat{\alpha}$  является мерой нарушения зеркальной симметрии турбулентных движений. При отсутствии зеркальной симметрии турбулентность приводит к генерации магнитного поля (Moffatt, 1972).

Оценка спиральности  $\hat{\alpha}$  в широком диапазоне показывает преимущество  $\alpha\omega$ -динамо при заметных энергетических потерях, растущих с увеличением отношения тороидального поля к полоидальному, и  $\alpha^2\omega$ -динамо со сравнимыми тороидальными и полоидальными магнитными полями. При этом возникает вопрос о единственности или множественности МГД состояний ядра Земли. Современные исследования показывают существование трех уровней стабилизации полоидального геомагнитного поля (Starchenko, 2000) на интервалах порядка 100 млн лет, после которого наблюдается быстрый переход (порядка 1 млн лет) на другой уровень (Солодовников, 1994).

Исследование перемежаемостей МГД состояний и областей притяжения эволюционных треков (странный аттрактор) позволяет описать структуру и перестройку фазового пространства базовых состояний. Численное трехмерное моделирование эволюции магнитного поля Земли за последние 40000 лет (Glatzmaier, Roberts, 1995, 1997) в основном воспроизводит характерные детали поведения магнитного поля (Рис. 3).

### Базовая система уравнений

В данном сообщении мы рассматриваем магнитное поле внешнего ядра Земли в предположении, что существует система токов (Рис. 4) на границе внутреннего ядра и система токов на границе ядро-мантия.

В первом приближении  $\alpha^2\omega$ -динамо источник потенциальной части магнитного поля может моделироваться двумя петлями токов подходящей величины, локализованных около экваторов внутреннего и внешнего жидкого ядер (Botvinovsky, 2000). Эволюция нечетных геомагнитных мод (Starchenko, 2000) описывается следующей динамической системой уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{M} &= \hat{\alpha} \cdot F - (m^2 + 1) \cdot M \\ \dot{F} &= \Omega \cdot M - F \\ \dot{m} &= (M^2 - 1) \cdot m \end{aligned}$$

где  $M$  – магнитный диполь на границе внутреннего ядра,  $m$  – магнитный диполь на границе ядро-мантия,  $F$  – полоидальное поле в ядре,  $\hat{\alpha}$  – спиральность,  $\Omega$  – угловая

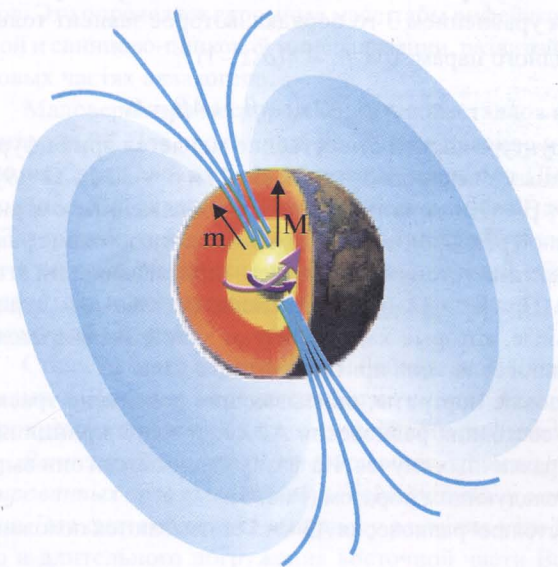


Рис. 4. Полоидальное и тороидальное поле во внешнем ядре Земли.

скорость вращения ядра.

Динамическая система обладает следующими типами симметрий:

$$\begin{aligned} 1) & m \rightarrow -m & 2) & \begin{matrix} M \rightarrow -M \\ F \rightarrow -F \end{matrix} & 3) & \begin{matrix} M \rightarrow -M \\ F \rightarrow -F \\ m \rightarrow -m \end{matrix} \end{aligned}$$

Данная система уравнений обладает пятью состояниями равновесия (Kitiashvili et al., 2001):

$$\begin{aligned} A1: & F = 0, \quad m = 0, \quad M = 0 \\ A2: & F = \Omega, \quad m = \sqrt{-1 + \hat{\alpha}\Omega}, \quad M = 1 \\ A3: & F = \Omega, \quad m = -\sqrt{-1 + \hat{\alpha}\Omega}, \quad M = 1 \\ A4: & F = -\Omega, \quad m = \sqrt{-1 + \hat{\alpha}\Omega}, \quad M = -1 \\ A5: & F = -\Omega, \quad m = -\sqrt{-1 + \hat{\alpha}\Omega}, \quad M = -1 \end{aligned}$$

При условии  $\hat{\alpha} \Omega \geq 1$  условия устойчивости Рауса-Гурвица не выполняются для состояния равновесия A1. Решение неустойчиво по Ляпунову. Корни характеристического уравнения для состояния равновесия A1 дей



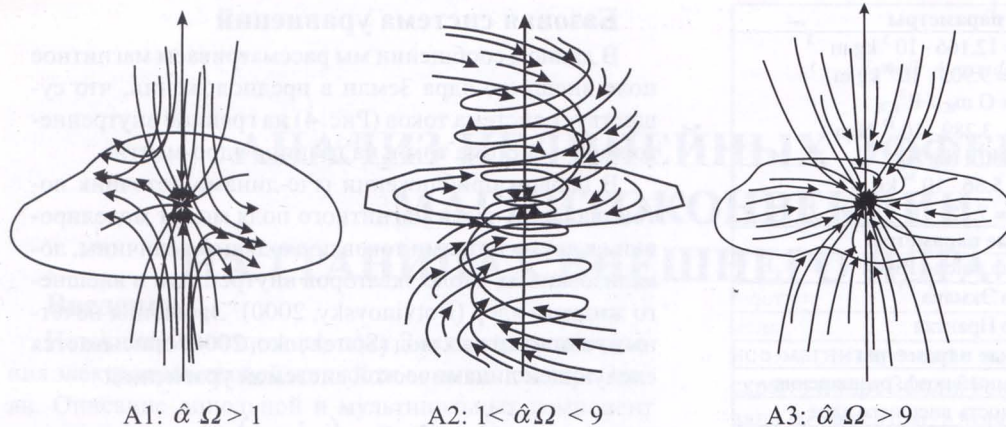


Рис. 5. Бифуркации магнитного диполя Земли.

ствительные. При  $\hat{\alpha} \Omega > 1$  корни различных знаков – состояние неустойчиво, типа седла; при  $\hat{\alpha} \Omega = 1$  состояния равновесия вырожденное,  $s$  с одним нулевым корнем; при  $\hat{\alpha} \Omega < 1$  все корни отрицательные, состояние равновесия, типа узла устойчиво по Ляпунову.

Состояние равновесия A2 описывается характеристическим уравнением 3-го порядка, которое зависит только от одного параметра  $\beta_1 = 4(\hat{\alpha}\Omega - 1)$ :

$$x^3 + x^2\beta_1 - 2x(1 + \beta_1) + 4\beta_1 = 0$$

Структура корней существенно меняется при бифуркационных значениях  $\beta_1 = 0$  ( $\hat{\alpha} \Omega = 1$ ) и  $\beta_1 = 32$  ( $\hat{\alpha} \Omega = 9$ ). При  $0 < \beta_1 < 32$  - корни комплексно-сопряженные с отрицательной реальной частью. Им отвечают состояния равновесия типа устойчивого фокуса – притягивающий аттрактор. При  $\beta_1 > 32$  - все корни действительные и отрицательные, которые характеризуют устойчивое состояние равновесия типа притягивающего узла.

Фазовые портреты, описывающие поведение траекторий состояния равновесия A2 содержат 3 принципиально различных случая. На фазовой плоскости они выглядят следующим образом (Рис. 5).

Состояния равновесия A3 - A5 описываются похожим

характеристическим уравнением и имеют аналогичный вид фазовых портретов.

Два бифуркационных значения  $\hat{\alpha}\Omega = 1$  и  $\hat{\alpha}\Omega = 9$ , при которых происходит существенная перестройка магнитного дипольного момента, соответствуют критическим значениям:  $\hat{\alpha} = 1.38 \times 10^4$  и  $\hat{\alpha} = 1.24 \times 10^5$  при угловой скорости вращения ядра  $\Omega = 7.27 \times 10^{-5}$  с.

### Выводы

1. Проведен качественный и бифуркационный анализ динамической системы, описывающей генерацию магнитного поля на границах внутреннее-внешнее ядра и внутреннее ядро – мантия;
2. Найдены бифуркационные значения параметров, при которых происходит перестройка эволюционных треков МГД состояний;
3. Получены фазовые портреты траекторий в окрестности состояний равновесия и решения линеаризованной системы уравнений  $\alpha^2\omega$ -динамо;
4. Дана оценка бифуркационным значениям параметра  $\hat{\alpha}$  для реалистичного значения скорости вращения ядра.

### Литература

Botvinovsky V. *Abs. of conf SEDI'2000*. Exeter. 2000. 123.  
 Джекобс Дж. *Земное ядро*. М. Мир. 1979. 307.  
 Солодовников Г.М. *ДАН. Геофизика*, 1994  
 Glatzmaier G.A., Roberts P.H. *PEPI*, 91. 1995. 63.  
 Glatzmaier G.A., Roberts P.H. *Contemp. Phys.*, 38. 1997. 269.  
 Kitashvili I. et al. *General Assembly of EGS'2001*, Nice, France. 2001.  
 Moffatt H.K. *J. Fluid Mech.*, 53. 1972. 385.  
 Parker E.N. *ApJ.*, 122. 1955. 293.  
 Starchenko S.V. *PEPI*, 117. 2000. 225  
 Starchenko S.V. *Abs. of conf SEDI'2000*. Exeter. 2000. 144.  
 Steenbeck M., Krause F. *Z. Naturforsch.*, 21a. 1966. 1285



Александр Васильевич Гусев

К.ф.-м.н., с.н.с. Область научных интересов: релятивистская астрофизика, космология, теория вращения Луны и планет, внутреннее строение Земли, теория катастроф и качественный анализ динамических систем, плюм-тектоника и дифференциальное вращение жидкого ядра Земли и Луны. Автор более 100 публикаций. Член 5 международных организаций.



Ирина Николаевна Китиашвили

М.н.с. Астрономической Обсерватории им. Энгельгардта. Область научных интересов: эволюция планетных систем, внутреннее строение Земли и планет, исследование динамических систем методами качественного анализа и теории бифуркаций.